Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ.

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ $\qquad y'' + \lambda y = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$y(a) = c_1,\ y(b) = c_2$

Θέλω συνοριακές τιμές.

$x \in [a, b]$

$$\left.\begin{aligned} c_1 y(a) + c_2 y'(a) + c_3 y(b) + c_4 y'(b) &= h_1 \\ d_1 y(a) + b_2 y'(a) + d_3 y(b) + d_4 y'(b) &= h_2 \end{aligned}\right\} \text{Συνοριακές συνθήκες.}$$

Μπορεί να απαιτήσω ότι η λύση στα άκρ.

$\int_a^b \ldots = 5$

Εμείς θα εξετάσουμε πιο απλές συνθήκες

$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0$

$d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0$

διαχωρισμένες
διότι η μία αφορά το a.
και η άλλη το b.

$a_1 y' + a_0 y = 0$ πολλ/ζω με $e^{\int \frac{a_0}{a_1}(s) ds}$

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad a_2(x) \neq 0.$

$y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = 0.$

πολλ/ζω με $e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx}$

$$e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx} y'' + \frac{a_1}{a_2} y' e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx} + e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx} \frac{a_0}{a_2} y = 0$$

$$\underbrace{\left(e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx} y'\right)'} + \underbrace{\frac{a_0}{a_2} e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx}} y = 0$$

$(p(x) y'(x))' + q(x) y = 0$ (Το λ μπορεί να μπει μπροστά από το $q(x)$

$$\Rightarrow \boxed{(p(x) y'(x))' + (q(x) + \lambda \cdot r(x)) y(x) = 0.}$$

Άρα έχω την εξίσωση

$$(S)\quad (py')' + (q+\lambda r)y = 0 \quad // \quad \begin{array}{l} c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0 \\ d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0 \end{array} \quad (C)$$

$|c_1|+|c_2| \neq 0 \quad |d_1|+|d_2| \neq 0.$

λ: ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ $\longrightarrow$ ιδιοσυναρτήσεις

σελ 128 (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ).

ΘΕΩΡΗΜΑ 31 σελ 129

i) Αν y_0 είναι μια ιδιοσυνάρτηση του (S)-(C) που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή λ_0, τότε όλες οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή λ_0 είναι οι $c\,y_0$ ($c \neq 0$)

ii) Δυο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες ως προς την συνάρτηση βάρους r στο διάστημα a,b.

$$\left(\int_a^b r(x) y_{\lambda_1}(x) y_{\lambda_2}(x)\, dx = 0 \right).$$

Αποδ

(i) ας είναι y_0, y_1 ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0.

Η ορίζουσα $W(y_0,y_1)(a) = \begin{vmatrix} y_0(a) & y_1(a) \\ y_0'(a) & y_1'(a) \end{vmatrix} = y_0(a)y_1'(a) - y_0'(a)y_1(a) = 0$ γραμμ εξαρτ.

y_1, y_2 λύσεις διότι ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. ⊛

⊛ $\left.\begin{array}{l} c_1 y_0(a) = -c_2 y_0'(a) \\ c_1 y_1(a) = -c_2 y_1'(a) \end{array}\right\} \Rightarrow y_0(a) = -\frac{c_2}{c_1} y_0'(a)$

$y_1(a) = -\frac{c_2}{c_1} y_1'(a)$

++ (από βιβλίο).

(ii) Ας είναι y_1, y_2 δυο ιδιοσυναρτήσεις του (S)-(C) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 με $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (διαφορετικές ιδιοτιμές)

$$\left.\begin{array}{l} (py_1')' + (q+\lambda_1 r)y_1 = 0 \\ (py_2')' + (q+\lambda_2 r)y_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} y_2 \\ y_1 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (py_1')'y_2 + (q+\lambda_1 r)y_1 y_2 = 0 \;(1) \\ (py_2')'y_1 + (q+\lambda_1 r)y_1 y_2 = 0 \;(2) \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)-(2) \\ (-)\end{array}$$

$$\Rightarrow (py_1')'y_2 - (py_2')'y_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) r y_1 y_2 = 0. \quad x \in [a,b]$$

Ολοκληρώνω:

$$\int_a^b (py_1')' y_2\,dx - \int_\alpha^b (py_2')' y_1\,dx + (\lambda_1-\lambda_2)\int_\alpha^b r y_1 y_2\,dx = 0, \quad x\in[a,b]$$

Ολοκλ κατά παράγοντες

$$[y_2 p y_1']_a^b - \int_\alpha^b \cancel{p y_1' y_2'}\,dx - \left([p y_2' y_1]_\alpha^b - \int_\alpha^b \cancel{p y_2' y_1'}\,dx\right)$$

$$= y_2(b)y_1'(b)p(b) - y_2(a)y_1'(a)p(a) - p(b)y_2'(b)y_1(b) - p(a)y_2'(a)y_1(a)$$

$$= p(b)\Big[\underbrace{y_2(b)y_1'(b) - y_2'(b)y_1(b)}_{0}\Big] - p(a)\Big[\underbrace{y_2(a)y_1'(a) + y_2'(a)y_1(a)}_{0}\Big] = 0$$

$c_1 \neq 0 \neq d_1$

$y_1(a) = -\frac{c_2}{c_1} y_1'(a)$ → Από συνοριακές συνθήκες αποδ. ότι είναι 0.

$y_2(a) = -\frac{c_2}{c_1} y_2'(a)$

(προβλ συνοριακών τιμών) σελ 131

Το π.σ.τ. (S)-(C) έχει μια ακολουθία διακεκρ. ιδιοτιμών

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ με $\lambda_n \to +\infty$.

$$\int_a^b r(x) y_i(x) y_j(x)\,dx = 0 \quad i\neq j$$

τύπους ασκ εξέτασης

Παράδειγμα 5 $y'' + \lambda y = 0$, $x\in[0,\pi]$ $y(0)=0$, $y'(\pi)=0$

Να λυθεί το προβλ ιδιοτιμών

(εδώ $r=1$) Λύση (∃ σίγουρα λύση) βάση θεωρήματος.

Χπ $s^2+\lambda=0$

- $\lambda<0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{-\lambda}$
- $\lambda=0 \Rightarrow s=0$ διπλή
- $\lambda>0 \Rightarrow s=\pm i\sqrt{\lambda}$

⟶

i) $\lambda<0$ $\quad s=\pm\sqrt{|\lambda|}$

$\beta\sigma\lambda \left\{e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, e^{\sqrt{|\lambda|}x}\right\}$

$y(x)=c_1 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}+c_2 e^{\sqrt{|\lambda|}x}$, $x\in[0,\pi]$

$y'(x)=c_1\cdot(-\sqrt{|\lambda|}x)e^{-\sqrt{|\lambda|}x}+c_2\sqrt{|\lambda|}x\, e^{\sqrt{|\lambda|}x}$, $x\in[0,\pi]$

$y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0. \Rightarrow c_1=-c_2$

$y'(\pi)=0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|}\left(c_1 e^{-\sqrt{|\lambda|}\pi}+c_2 e^{\sqrt{|\lambda|}\pi}\right)=0$ $\Big|$ $c_2\cdot\Big[\underbrace{-e^{-\sqrt{|\lambda|}\pi}+e^{\sqrt{|\lambda|}\pi}}_{\neq 0}\Big]=0 \Rightarrow c_2=0$

και $c_1=0$.

αρα $y(x)=0$ μηδενική λύση.

Δεν υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές.

ii) $\lambda=0$ $\quad s=0$ διπλή.

$\beta\sigma\lambda\ \{1, x\}$ $\quad y(x)=c_1+c_2x$ $\quad y(0)=0 \Rightarrow c_1=0$

$y'(x)=c_2$ $\quad y'(\pi)=c_2=0 \Rightarrow c_2=0$

Δεν υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές

iii) $\lambda>0$ $\quad s=\pm i\sqrt{\lambda}$

$\beta\sigma\lambda \left\{\cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x\right\}$

$y(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$, $x\in[0,\pi]$

$y'(x)=-c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$y(0)=0 \Rightarrow c_1\cdot 1=0 \Rightarrow c_1=0$

$y'(\pi)=0 \Rightarrow c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \longrightarrow \cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0. \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi=n\pi-\frac{\pi}{2}$ $\quad n=1,2,\dots$ $n\in\mathbb{N}$

αν $c_2=0$ θα είχαμε πάλι μηδενική λύση. $\quad$ το $c_2\neq 0$, $\sqrt{\lambda}\neq 0$. $\quad$ $\sqrt{\lambda}=n-\frac{1}{2}$

$\lambda_n=(n-\frac{1}{2})^2$

$y_n(x)=\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)$, $x\in[0,\pi]$ $\quad$ αντ. ιδιοσυναρτήσεις

$n=1,2,\dots$ $\quad$ ορθογώνια S

Επαληθ $\int_0^{\pi} \sin(\nu-\frac{1}{2})x \, \sin(k-\frac{1}{2})x \, dx$ $\quad k\neq \nu$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos\left(\nu-\frac{1}{2}+\left(-k+\frac{1}{2}\right)\right)x - \cos\left(\nu-\frac{1}{2}+\frac{k-1}{2}\right)x \, dx$$

$(\nu-k)x \qquad (\nu+k-1)x \qquad = \dots = 0.$

Παράδειγμα Να επιλύσεται την εξίσωση.

$x^2y''+xy'+\lambda y=0 \qquad x\in[1,e]$

$y(1)=0, \; y(e)=0$

Λύση

Εξίσωση Euler $t=\log x$.

⋮

Και έπειτα λύνω όπως πριν.

παιρνω διαφορες περιπτωσεις για λ.

$x\neq i,-i$ ομαλ σημεια

$x=1,-1$ ανωμ σημειο

(E_1) $(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0 \quad (p\in\mathbb{R})$ (Legendor)

(E_2) $(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0 \quad p\geq 0$ (. . .)

→ μπορω να αναζητησω προβλ ιδιοτιμων 1 μπροστα απο το y'' δεν μηδενιζεται

(E_3) $y''-2xy'+2py=0 \quad p\in\mathbb{R}$ (Herm)

Για (E_1)

$$\left(-(1-x^2)y'\right)'+p(p+1)y=0$$

$x_0=0$ → ομαλό σημείο. $p\in\mathbb{N}$.

για $p=n$ $\quad (-(1-x^2)y')'+n(n+1)y=0.$

απο καποιο σημειο και μετα μηδενιζεται

Η μια λυση θα ειναι πολυωνυμικη. Οπως πριν για διαφορες τιμες του n.

$$\left(-(1-x^2)y_n'\right)' + n(n+1)y_n = 0$$ (ΟΧΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ)

$$\left((1-x^2)y_m'\right)' + m(m+1)y_m = 0$$

$$\int_{-1}^{1} y_n y_m \, dx = 0$$

<u>Πρόταση 2</u> σελ 272

$$\int_{-1}^{1} y_n y_m \, dx = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} p_n p_m \, dx = 0}$$ Οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων στο $[-1, 1]$.